Szpirglas (p277)

GROUPES SIMPLES D'ORDRE 60

101, 103
104, 105

Tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

L'idée de la preuve est la suivante : on va établir l'existence d'un sous-groupe $H \leq G$ d'indice 5, et dire que G agit fidèlement sur G/H. De là, G sera isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_5$, i.e. $G \simeq \mathcal{A}_5$. Pour que le raisonnement apparaisse moins obscur, on va commencer par la fin de la preuve de Szpirglas.

- Supposons que G admet un sous-groupe H d'indice 5. En faisant agir G sur G/H par translation, on montre que $G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G/H) \simeq \mathfrak{S}_5$ car l'action est fidèle. Or $\# G = 60 = \frac{1}{2} \# \mathfrak{S}_5$, donc G est isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_5$, c'est à dire $\mathcal{A}_5$. (NB: $\mathcal{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$. En effet, si H est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$, alors $\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_n/H \overset{\varphi}{\simeq} \{\pm 1\}$, donc $\varphi \circ \pi$ est un morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm1\}$, donc $\varphi \circ \pi = \varepsilon$, donc $H = \mathrm{Ker}(\varphi\circ\pi) = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathcal{A}_n$).
- Supposons que G admet un sous-groupe H d'indice ≤ 4. En faisant agir G sur G/H : par translation, on montre que $G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G/H) \longrightarrow \mathfrak{S}_4$ car l'action est fidèle. Or $\# G = 60 > 24 = \# \mathfrak{S}_4$, c'est contradictoire.
- Supposons, par l'absurde, que G n'admet pas de sous-groupe strict d'indice ≤ 5, i.e. d'ordre ≥ 12. $((G:H) \leq 5 \iff \# G \leq 5 \# H \iff \# H \geq 12)$

Pour p premier divisant $\# G = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, on note $Syl_p(G)$ l'ensemble des p-Sylow de G, et $n_p = \# Syl_p(G)$.

Rappel: théorèmes de Sylow: soit $p \mid \# G$ premier.

1. $Syl_p(G) \neq \emptyset$
2. G agit transitivement sur $Syl_p(G)$ par conjugaison
3. $n_p \equiv 1\ [p]$ (donc $n_p \mid m$)

Et en corollaire : $n_p = 1$ si, et seulement si le p-Sylow de G est distingué.

- D'après les théorèmes de Sylow, et comme G est simple, $n_2 \in \{3, 5, 15\}$. Comme on a supposé que G n'admet pas de sous-groupe d'indice ≤ 5, on a $n_2 = 15$: en effet, si $S \in Syl_2(G)$, alors d'après la relation orbite-stabilisateur, $(G:N(S)) = \# G/N(S) = \# Orb(S) = n_2$ car G agit transitivement sur $Syl_2(G)$. Ainsi, $n_2 > 5$.

- Soit $(S_1, S_2) \in \mathrm{Syl}_2(G)^2$ tel que $S_1 \neq S_2$, montrons que $S_1 \cap S_2 = \{1\}$. Soit $g \in S_1 \cap S_2$. Comme $\#S_1 = \#S_2 = 4$, S_1 et S_2 sont abéliens, donc $S_1 \cup S_2 \subseteq C(g)$, donc $\# C(g) > 4$ ($S_1 \neq S_2$ donc $\#S_1 \cap S_2 \in \{1,2\}$. Ensuite, $\#S_1 \cup S_2 = \#S_1 + \#S_2 - \#S_1 \cap S_2 = 8 - \#S_1 \cap S_2 \geqslant 6 > 4$). Or $S_1 \subseteq C(g)$ donc d'après le théorème de Lagrange, $4 = \#S_1 \mid \#C(g) \mid \#G = 60$, donc $\#C(g) \in \{12, 20, 60\}$. Or par hypothèse, G n'admet pas de sous-groupe strict d'ordre $\geqslant 12$, donc $\#C(g) = 60$, c'est-à-dire que $g \in Z(G)$. Or G est simple donc $Z(G) = \{1\}$, donc $g = 1$.
- Les éléments non triviaux des 2-Sylow (lesquels sont d'ordre 4) sont d'ordre 2 ou 4. Il y a donc au moins $n_2(2^2 - 1) = 45$ éléments d'ordre 2 ou 4 dans G.
- D'après les théorèmes de Sylow, $n_5 \mid 12$, donc $n_5 \in \{1,2,3,4,6,12\}$, mais $n_5 \equiv 1 \; [5]$ donc $n_5 \in \{1, 6\}$. Enfin, G est simple, donc $n_5 \neq 1$, donc $n_5 = 6$. L'intersection de deux 5-Sylow distincts étant réduite à $\{1\}$, et les éléments de G d'ordre 5 étant les éléments non triviaux de ses 5-Sylow, il y en a $n_5(5-1) = 24$.
- On en déduit que $\#G = 60 \geqslant 45 + 24 = 69$, ce qui est absurde. ■